无理数引发的数学与算法

张平文（武汉大学）

蒋凯（湘潭大学数学与计算科学学院）

背景和目标

无理数起主导作用的体系与很多数学分支和自然科学领域有着深刻而重要的联系，并影响着这些领域的发展。由无理数引发的数学和算法已经逐渐成为基础研究和科学研究的重点领域和前沿方向。但目前该领域仍然有大量的理论和计算问题仍未解决，亟需投入更多的科研人员，对这一领域开展深入的研究。为了推进该领域的研究，武汉数学与智能研究院联合国家天元数学中部中心、湖北国家应用数学中心，现面向广大师生开设“无理数引发的数学与算法”讨论班。

第一部分：基础知识

- **无理数的基础知识与丢番图逼近理论**（2次课）
  首先，介绍无理数及其基本性质，探讨无理数的几种分类，包括丢番图数与刘维尔数、代数数与超越数、可很好逼近数与不可很好逼近数。讨论连分数展开及其相关性质。介绍一些重要的无理数集，比如Pisot数、Salem数。然后，介绍丢番图逼近理论，从齐次与非齐次，单个与多个丢番图系统出发，分别进行学习和讨论。单个齐次丢番图不等式的理论相对完善，主要介绍狄利克雷定理与Roth定理，给出丢番图逼近的上下界；在单个非齐次丢番图不等式中，引入快速填充的概念，结合连分数展开与不可很好逼近数，发展相应的丢番图逼近理论；在多个联立丢番图不等式组中，介绍一些有趣的性质——实数解与整数解的等价性、齐次不等式解与非齐次不等式解的等价性、解的上下界同阶性，进一步推广快速填充，引出强无关的概念；讨论无限个丢番图不等式系统的解及其性质，引入调和集。

- **几类重要点集**（2次课）
  介绍几种点集的定义以及它们之间的关联，包括Delone集、Meyer集、调和集、模型集。首先，做一些基础知识的铺垫，介绍几个基本概念：一致离散与相对稠密，局部紧阿贝尔群，对偶与特征标等。然后，介绍各个点集的定义，针对调和集与Meyer集的多种定义，论证不同定义之间的等价性。最后，给出并论证不同点集之间的关系：从Delone集与调和集出发均能得到Meyer集；Meyer集既是调和集的子集，也是Delone集的子集；模型集是

一类特殊的相对稠密调和集，它包含在Meyer集中，具有重要的性质。还将介绍生成模型集的方法--切割-投影法。此外，也将给出Pisot数、Salem数与这些集合之间的关系。

- **概周期密铺** （3次课）
  介绍密铺以及概周期密铺的相关概念和结论。将从Penrose密铺切入，给出三种构造概周期密铺的方法：匹配法、替换/膨胀法和切割-投影法。接下来，从一维概周期密铺（比如斐波拉契序列）开始，介绍自由群、Hulls以及Gottschalk定理等所需的基本数学知识，以此给出局部不可区分性、重复性、近邻性等密铺的基础概念，在数学上给出一维概周期密铺的严格定义，并介绍对称性及其在一维密铺中的应用。然后，通过平均值序列、周期倍增序列与折叠序列、Thue-Morse替换等实例来加深对概周期密铺的理解。之后，讨论更一般的密铺结构，将局部不可区分性等性质和概念推广至高维密铺问题，如Penrose密铺及Ammann-Beenker型密铺等，借此深化对概周期密铺的理解。此外，将介绍密铺问题的一些前沿进展。

- **概周期函数**（1次课）
  给出概周期函数的基本性质，包括：定义、三角函数逼近性定理和唯一性定理等。介绍概周期函数Sobolev空间以及相关的嵌入定理。进一步，讨论概周期函数的与调和集之间的关系。

- **遍历性理论简介**（1次课）
  介绍一些基本概念，包括可测变换、遍历变换等，进而引出Birkhoff遍历性定理。给出遍历性理论在概周期系统中的应用，比如，计算月球运行轨道的旋转速率，讨论无理数在遍历性理论中的作用；讨论准周期函数傅里叶系数与其高维周期母函数傅里叶系数的关系。

第二部分：算法（2-3次课）

- **投影法及其应用**
  介绍投影法的基本思想：利用准周期函数是高维环面上无理流形这一性质，将准周期系统嵌入到高维周期系统中计算，再投影到低维空间，获得准周期系统。给出投影法的实现细节，并基于遍历性定理，建立投影法的数学理论和收敛性分析。结论表明：对于光滑系统，投影法具有指数收敛，并可以运用FFT减少计算量。然后，介绍投影法的一些应用，包括准晶、准周期多尺度问题、晶界、准周期薛定谔方程和特征值问题等。

- **周期逼近方法**

从准周期函数逼近和准周期算子逼近两方面，介绍一些初步的结论，包括丢番图频率准周期函数的逼近性理论，准周期薛定谔算子谱逼近等。

- **有限点恢复法**
  介绍计算准周期问题的有限点恢复法。该方法根据不可很好逼近数和可很好逼近数的性质，在准周期函数定义域上发展相应的有限点选取策略，再通过准周期函数定义域与高维环面之间的同态关系和插值方法，利用有限点恢复全空间的准周期函数。该算法可以适用于光滑和非光滑准周期系统的研究。